Chapitre M3 – Approche énergétique de la dynamique

I) Travail et puissance d'une force

1) Puissance d'une force

Soit M un point matériel se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}$ et subissant une force $\overrightarrow{F}$. On appelle **puissance** de $\overrightarrow{F}$ la grandeur :

$$\boxed{\mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}}$$

La force est dite :
- **motrice** si $\mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right) > 0$ (ie. que la force est globalement dans la même direction que la vitesse) ;
- **résistive** si $\mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right) < 0$ (ie. que la force est globalement dans la direction opposée à la vitesse)

Si $\mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right) = 0$, alors la force est orthogonale à la vitesse. On dit que la force ne travaille pas.

2) Travail élémentaire d'une force

Le **travail élémentaire** de la force $\overrightarrow{F}$ pendant un intervalle de temps infinitésimal dt est défini par :

$$\boxed{\delta W\left(\overrightarrow{F}\right) = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right) \times dt = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$$

<u>Démonstration</u> de l'équivalence des deux formes :

$$\mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right) \times dt = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} \times dt = \overrightarrow{F} \cdot \frac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt} \times dt = \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

<u>Remarque</u> :
- « δ » indique une quantité infinitésimale (ici, une quantité infinitésimale d'énergie δW) ;
- « d » indique une variation infinitésimale (ici, du vecteur position $d\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, du temps dt).

3) Travail d'une force au cours d'un déplacement

Le **travail** de la force $\overrightarrow{F}$ pendant un chemin allant de A (au temps t_{A}) à B (au temps t_{B}) vaut :

$$\boxed{W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}\left(\overrightarrow{F}\right) = \int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right) \times dt = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$$

4) Application

Version prof

Exercice TD n° 3611 : Glissement sur un plan incliné. Questions 1 à 3.

II) Énergie cinétique

1) Définition

On appelle **énergie cinétique** de M la grandeur :

$$\boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

2) Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Théorème (TPC) :

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique de M est égale à la puissance des forces s'exerçant sur M.

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right)}$$

Démonstration :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}\right) = \frac{m}{2}\left(\overrightarrow{v}\cdot\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\cdot\overrightarrow{v}\right) = m\,\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}\cdot\overrightarrow{v} \underset{\underset{\text{PFD}}{\uparrow}}{=} \sum \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v} = \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right)$$

3) Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Théorème (TEC) :

Dans un référentiel galiléen, la variation temporelle de l'énergie cinétique de M entre deux points A et B est égale au travail des forces s'exerçant sur M sur le chemin A $\rightarrow$ B.

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_c = \sum W_{\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}}\left(\overrightarrow{F}\right)}$$

Démonstration :

On intègre le TPC entre les instants t_{A} et t_{B}.

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right) \quad &\Rightarrow \quad \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{d\mathcal{E}_c}{dt}\times dt = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right)\times dt \\
&\Rightarrow \quad \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} d\mathcal{E}_c = \sum \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right)\times dt \\
&\Rightarrow \quad \mathcal{E}_c(\mathrm{B}) - \mathcal{E}_c(\mathrm{A}) = \sum W_{\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}}\left(\overrightarrow{F}\right) \\
&\Rightarrow \quad \Delta\mathcal{E}_c = \sum W_{\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}}\left(\overrightarrow{F}\right)
\end{aligned}$$

Remarque :

- « Δ » indique une variation macroscopique (ici, de l'énergie cinétique).

4) Application

Version prof

Suite de l'exercice TD n° 3611 : Glissement sur un plan incliné. Question 4.

III) Énergie potentielle et forces conservatives

1) Définition

Une force $\overrightarrow{F}_c$ est dite **conservative** si son travail entre A et B ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des coordonnées des points A et B. Dans ce cas, il existe une fonction **énergie potentielle** associée à $\overrightarrow{F}_c$ et définie par :

$$\boxed{\delta W\left(\overrightarrow{F}_c\right) = -d\mathcal{E}_p \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_c\right) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dt}}$$

On en déduit le travail d'une force conservative entre A et B :

$$W_{\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}}\left(\overrightarrow{F}_c\right) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_c\right)\times dt = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{d\mathcal{E}_p}{dt}\times dt = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} d\mathcal{E}_p = -\left[\mathcal{E}_p(\mathrm{B}) - \mathcal{E}_p(\mathrm{A})\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}}\left(\overrightarrow{F}_c\right) = -\Delta\mathcal{E}_p}$$

On constate bien que le travail de $\overrightarrow{F_c}$ ne dépend pas du chemin mais uniquement de la valeur de l'énergie potentielle en A et B.

En particulier, si M parcourt une boucle (ie. B = A), alors

$$\boxed{W_{\text{boucle}}\left(\overrightarrow{F_c}\right) = 0}$$

Soit une force $\overrightarrow{F_c}$ à une seule variable :

$$\overrightarrow{F_c}(x) = F_c(x)\,\overrightarrow{u_x} \qquad \text{marche avec } x, y, z, r$$

On en déduit le lien entre $\overrightarrow{F_c}$ et $\mathcal{E}_p$:

$$-d\mathcal{E}_p = \delta W\left(\overrightarrow{F_c}\right) = F_c(x)\,\overrightarrow{u_x}\cdot d\overrightarrow{\text{OM}} = F_c(x)\,\overrightarrow{u_x}\cdot(dx\,\overrightarrow{u_x} + dy\,\overrightarrow{u_y} + dz\,\overrightarrow{u_z}) = F_c(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_c(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}}$$

On dit que « la force dérive d'une énergie potentielle ». Attention, il s'agit bien d'une **dérivée spatiale**, pas temporelle.

Une énergie potentielle étant définie comme la primitive d'une force (avec le signe moins), elle est toujours définie à une constante près. Cette constante est arbitraire, elle n'a aucun sens physique et sera donc souvent prise égale à 0.

2) Énergie potentielle de pesanteur

On oriente un axe z vertical vers le haut. On considère le poids et cherchons une fonction énergie potentielle de pesanteur :

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z} \quad \Rightarrow \quad -mg = -\frac{d\mathcal{E}_{pp}}{dz} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_{pp} = mgz + cte$$

Suivons le même raisonnement avec un axe z vertical vers le bas.

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = mg\overrightarrow{u_z} \quad \Rightarrow \quad mg = -\frac{d\mathcal{E}_{pp}}{dz} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_{pp} = -mgz + cte$$

Bilan :

$$\boxed{\begin{cases} \mathcal{E}_{pp} = mgz + cte & \text{si l'axe } z \text{ est orienté vers le haut} \\ \mathcal{E}_{pp} = -mgz + cte & \text{si l'axe } z \text{ est orienté vers le bas} \end{cases}}$$

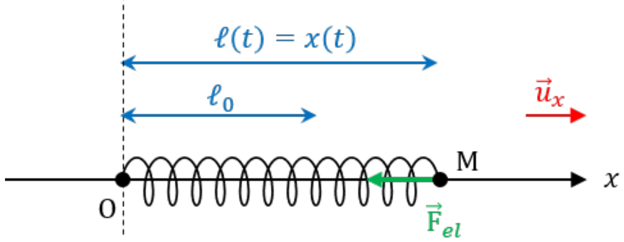
3) Énergie potentielle gravitationnelle

Cherchons une fonction énergie potentielle de pesanteur :

$$\overrightarrow{F_g} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\overrightarrow{u_r} \quad \Rightarrow \quad -G\frac{m_1 m_2}{r^2} = -\frac{d\mathcal{E}_{pg}}{dr} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_{pg} = -G\frac{m_1 m_2}{r} + cte}$$

4) Énergie potentielle élastique

Soit un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. On prend l'origine du repère en O, fixe. Dans ce cas, $x(t) = \ell(t)$.



Cherchons une fonction énergie potentielle élastique :

$$\overrightarrow{F_{el}} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x} = -k\,(x - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x} \quad \Rightarrow \quad -k\,(x - \ell_0) = -\frac{d\mathcal{E}_{p,el}}{dx} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2}k\,(x - \ell_0)^2 + cte$$

L'énergie potentielle d'un ressort est une parabole tournée « vers le haut ».

En revenant dans le cas général,

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2}k\left(\ell - \ell_0\right)^2 + cte}$$

5) Exemple d'une force non conservative

Version prof

Suite de l'exercice TD n° 3611 : Glissement sur un plan incliné. Question 5.

IV) Énergie mécanique

1) Définition

On appelle **énergie mécanique** de M la somme de l'énergie cinétique et des différentes énergies potentielles :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p} \quad \text{avec :} \quad \mathcal{E}_p = \sum_i \mathcal{E}_{p,i}$$

2) Théorème de la puissance mécanique (TPM)

Théorème (TPM) :

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie mécanique de M est égale à la puissance des forces non conservatives s'exerçant sur M.

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_{nc}\right)}$$

Démonstration :

On repart du TPC, et on sépare les forces en deux groupes : conservative et non conservative.

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right) = \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_c\right) + \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_{nc}\right) = \sum\left(-\frac{d\mathcal{E}_{p,i}}{dt}\right) + \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_{nc}\right) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dt} + \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_{nc}\right)$$

Ainsi, on a bien :

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p\right) = \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_{nc}\right)$$

Conséquence :

Lorsque l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement ($\mathcal{E}_m = cte$), on parle de mouvement conservatif. C'est le cas lorsque :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_{nc}\right) = 0$$

Ce se produit lorsque :

- le système n'est soumis qu'à des forces conservatives

$$\overrightarrow{F}_{nc} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_{nc}\right) = 0$$

- le système est soumis à des forces conservatives qui ne travaillent pas (direction orthogonale au mouvement)

$$\mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_{nc}\right) = \overrightarrow{F}_{nc} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \quad \text{avec :} \quad \overrightarrow{F}_{nc} \perp \overrightarrow{v}$$

  C'est le cas de la tension d'un fil ou de la réaction normale du support.

Lorsque l'énergie mécanique se conserve, elle est en particulier égale à a valeur initiale :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_m(t) = cte = \mathcal{E}_m(t=0)$$

Si $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} > 0$, le système est soumis à une force motrice qui augmente l'énergie mécanique du système. Exemple : le moteur d'une voiture génère une force motrice pour augmenter la vitesse du véhicule.

Si $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} < 0$, le système est soumis à une force résistive qui diminue l'énergie mécanique du système. Exemple : les frottements.

3) Théorème de l'énergie mécanique (TEM)

Théorème (TEM) :

Dans un référentiel galiléen, la variation temporelle de l'énergie mécanique de M entre deux points A et B est égale au travail des forces non conervatives s'exerçant sur M sur le chemin A $\rightarrow$ B.

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_m = \sum W_{\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}}\left(\overrightarrow{F}_{nc}\right)}$$

Démonstration : on intègre le TPM entre les instants t_A et t_B.

4) Quel théorème utiliser ?

Bilan des lois à notre disposition :

$$\text{TPC : } \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}\right) \qquad \text{TEC : } \Delta\mathcal{E}_c = \sum W_{\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}}\left(\overrightarrow{F}\right)$$

$$\text{TPM : } \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \sum \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_{nc}\right) \qquad \text{TEM : } \Delta\mathcal{E}_m = \sum W_{\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B}}\left(\overrightarrow{F}_{nc}\right)$$

$$\text{PFD : } m\,\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \sum \overrightarrow{F}$$

Si on cherche l'ED du mouvement : TPC, TPM ou PFD.

Si on cherche une grandeur en un point B et que l'on connaît tout d'un état A : TEC ou TEM.

Si l'exercice nous a déjà fait écrire l'énergie potentielle, utiliser les lois sur l'énergie mécanique, pas sur l'énergie cinétique.

5) Application

Version prof

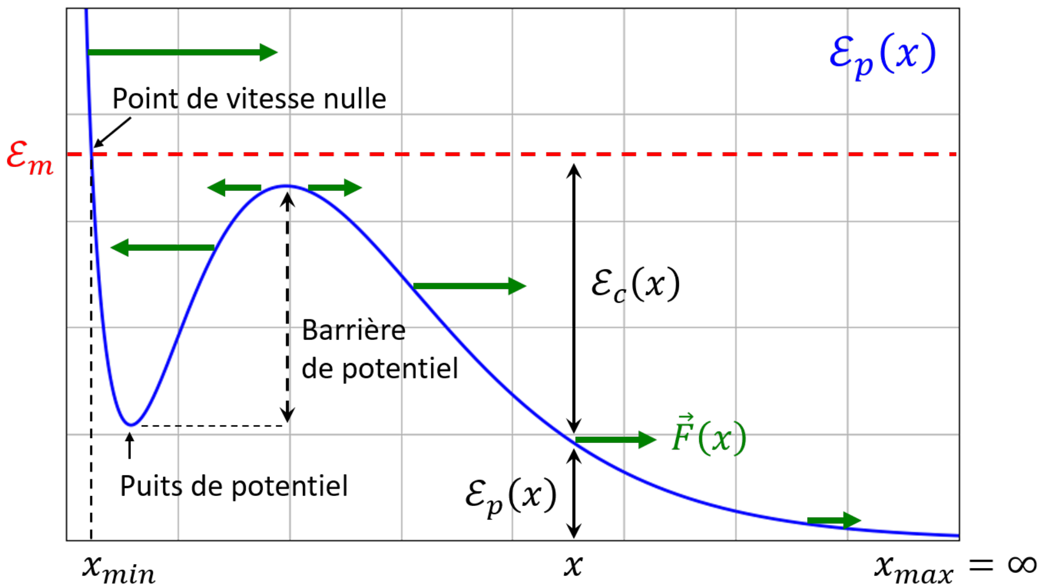
Exercice TD n° 5837 : Système masse ressort à l'horizontal.

V) Mouvement conservatif

1) Nature du mouvement

On considère que M est soumis uniquement à des forces conservatives à une dimension. On note $\mathcal{E}_p(x)$ l'énergie potentielle totale associée.

Exemple de graphe $\mathcal{E}_p(x)$.



Le mouvement étant conservatif, $\mathcal{E}_m = cte$. Or, $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ et $\mathcal{E}_c = \dfrac{1}{2}mv^2 \geq 0$. On en déduit que l'ensemble des positions accessibles par le système sont celles où $\boxed{\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_p}$. En cas d'égalité, $\mathcal{E}_c = 0$ donc $v = 0$.

Similairement, $\mathcal{E}_c$ (donc la vitesse) est maximale lorsque $\mathcal{E}_p$ est minimale.

Vocabulaire :

- un minimum local de $\mathcal{E}_p(x)$ s'appelle un **puits de potentiel** ;
- une **barrière de potentiel** correspond à l'énergie qu'il faut fournir au système pour le sortir d'un puits de potentiel.

Propriétés :

On rappelle que pour une force conservative :

$$\overrightarrow{F}(x) = F(x)\,\overrightarrow{u_x} \quad \text{avec :} \quad F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = -\mathcal{E}_p'(x)$$

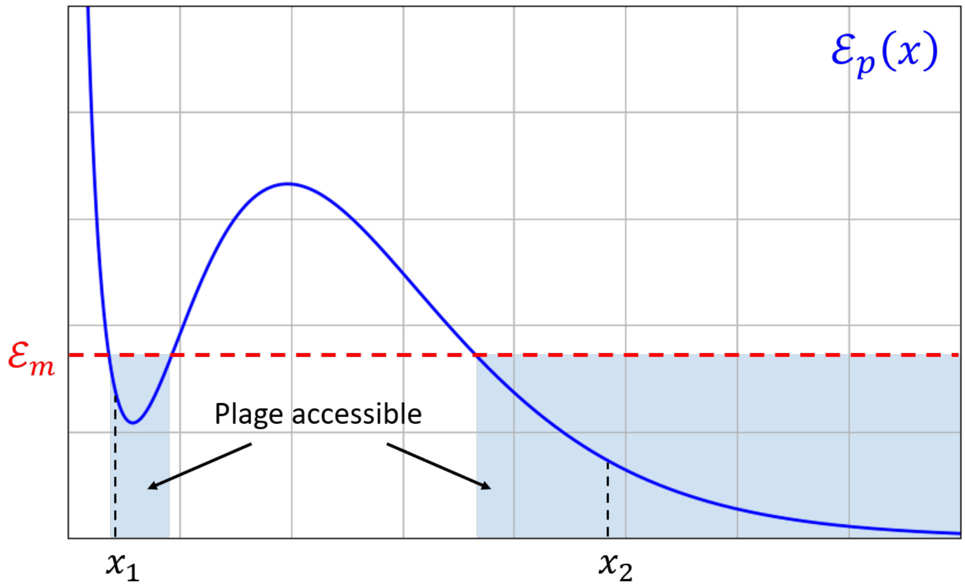
Ainsi, si $\mathcal{E}_p$ est croissant, alors $\mathcal{E}_p' > 0$ et la force est dirigée selon $-\overrightarrow{u_x}$. Si $\mathcal{E}_p$ est décroissant, alors $\mathcal{E}_p' < 0$ et la force est dirigée selon $+\overrightarrow{u_x}$.

De plus, plus la pente est importante, plus la force est intense.

On en déduit que si l'énergie mécanique du système ne lui permet pas de s'échapper d'un puits de potentiel, alors la trajectoire sera **bornée** et **périodique**. Dans le cas contraire, la trajectoire est **non bornée** et le système va s'échapper à l'infini.

Exemples :

On considère deux positions initiales (notées x_1 et x_2) différentes avec la même énergie mécanique. Dans le cas 1, le système sera piégé dans le puits de potentiel : il va osciller entre $x_{min,1}$ et $x_{max,1}$. Dans le cas 2, le système va atteindre le point $x_{min,2}$, repartir dans l'autre sens et partir à l'infini.



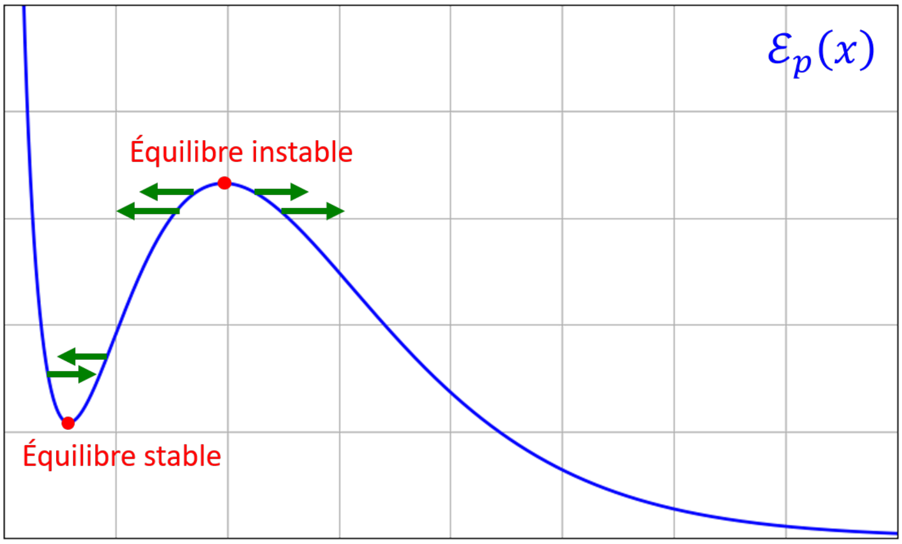
2) Positions d'équilibre et stabilité

Une **position d'équilibre** est une position où le système peut rester immobile, ie. une position où il ne subit aucune force.

$$\boxed{F(x_{eq}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_p'(x_{eq}) = 0}$$

Elle est dite **stable** si, proche de l'équilibre, le système subit une force qui le ramène vers l'équilibre. Sinon elle est dite **instable**.

$$\boxed{\begin{cases} \mathcal{E}_p'(x \simeq x_{eq}) \nearrow & \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_p''(x_{eq}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{minimum local} \\ \mathcal{E}_p'(x \simeq x_{eq}) \searrow & \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_p''(x_{eq}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{maximum local} \end{cases}}$$



3) Approximation harmonique près d'une position d'équilibre stable

On se place proche d'une position d'équilibre (x_{eq}) stable.

$$\mathcal{E}_p'(x_{eq}) = 0 \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{E}_p''(x_{eq}) = k > 0}$$

L'**approximation harmonique** consiste à approximer $\mathcal{E}_p(x)$ pour x proche de x_{eq} par un polynôme d'ordre 2 (ie. une parabole). Cette approximation est donnée par la formule de Taylor à l'ordre 2 :

$$\mathcal{E}_p(x) \simeq \mathcal{E}_p(x_{eq}) + (x - x_{eq})\,\mathcal{E}_p'(x_{eq}) + \frac{1}{2}(x - x_{eq})^2\,\mathcal{E}_p''(x_{eq}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_p(x) \simeq \frac{1}{2}k\,(x - x_{eq})^2 + cte}$$

On retrouve donc exactement l'énergie potentielle élastique d'un ressort.

Propriété :

Tout système, proche d'une position d'équilibre stable, se comporte comme un système masse ressort. En effet, dans l'approximation harmonique, le système subit une force :

$$F(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}k\,(x - x_{eq})^2 + cte\right] = -k\,(x - x_{eq}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{F}(x) = -k\,(x - x_{eq})\,\overrightarrow{u_x}}$$

On en déduit l'équation différentielle du mouvement. Le TPM donne :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \quad & \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\,(x - x_{eq})^2 + cte\right] = 0 \\
& \Rightarrow \quad m\dot{x}\ddot{x} + k\,(x - x_{eq}) = 0 \\
& \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = kx_{eq} \\
& \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq} \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}
\end{aligned}$$

Ce système est un **oscillateur harmonique**. Il sera étudier en détail dans les chapitres E3 et M4.

4) Application

Version prof

Exercice TD n° 0354 : Pendule simple et approximation harmonique.